Vorlesung an der

Berufsakademie Oldenburg

Unterrichtseinheit 16

Rekursion

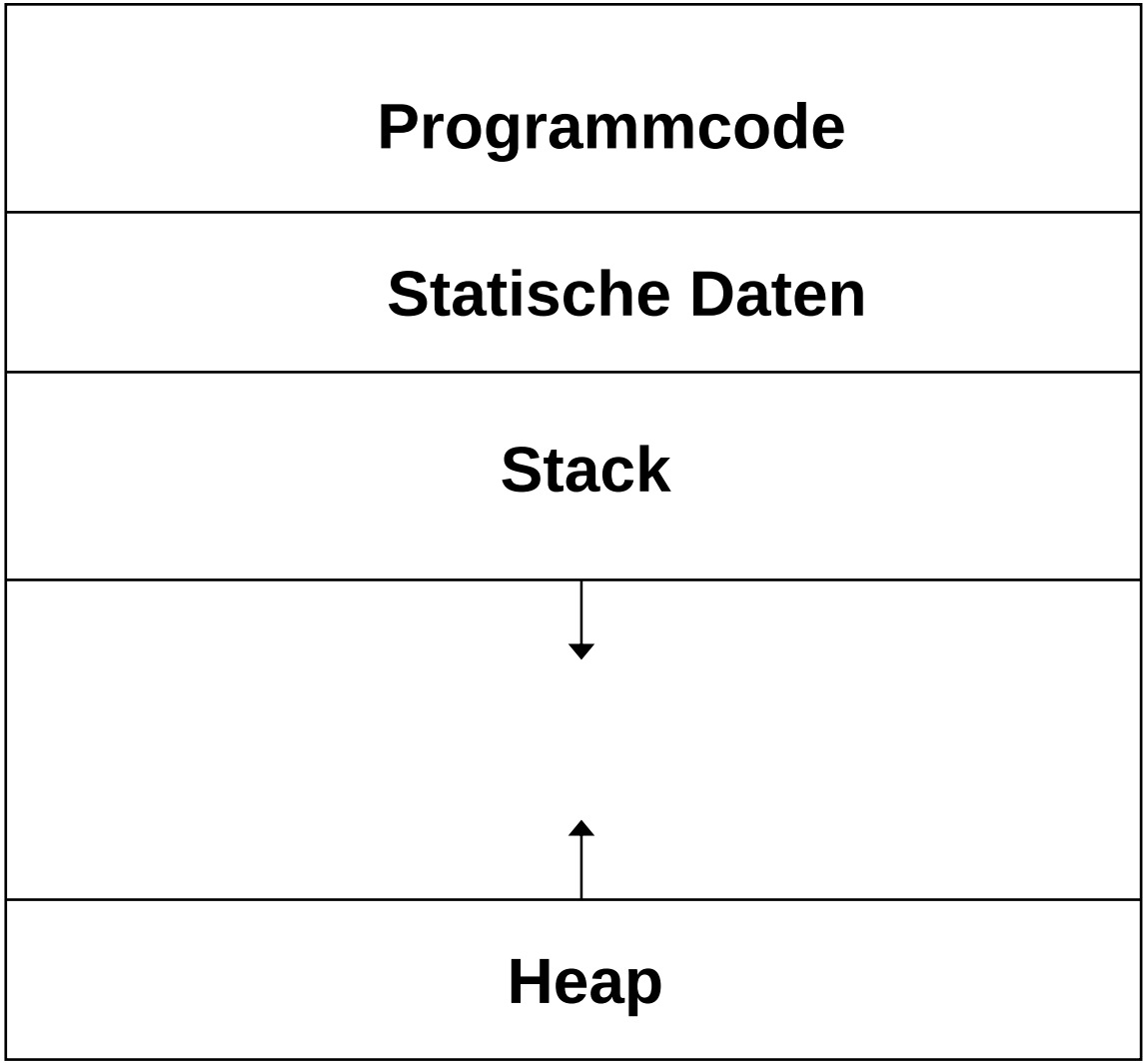
Dr. Dietrich Boles

Gliederung

- Speicherverwaltung
  - Stack
  - Heap
- Rekursion
  - Definitionen
  - Rekursive Prozeduren
  - Rekursive Funktionen
  - Endlosrekursion
- Backtracking
- Beispielprogramme

- Aufgaben

Speicherverwaltung



Programm-speicher

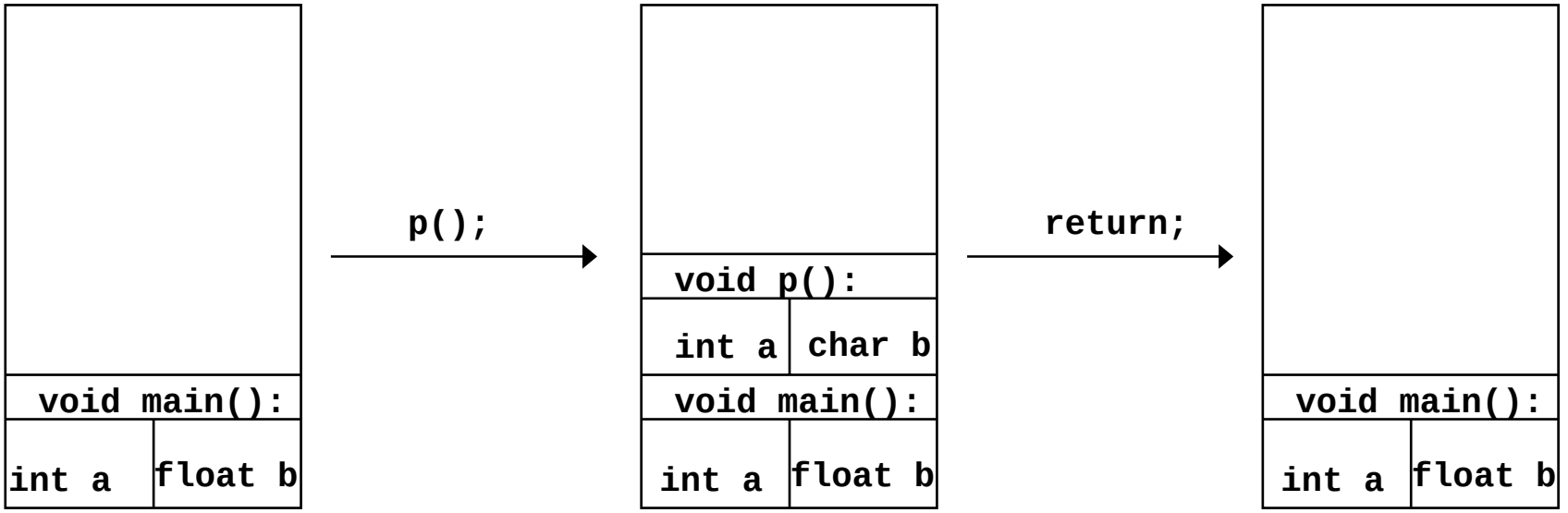
globale Variablen

lokale Variablen

Daten unter Programmkontrolle

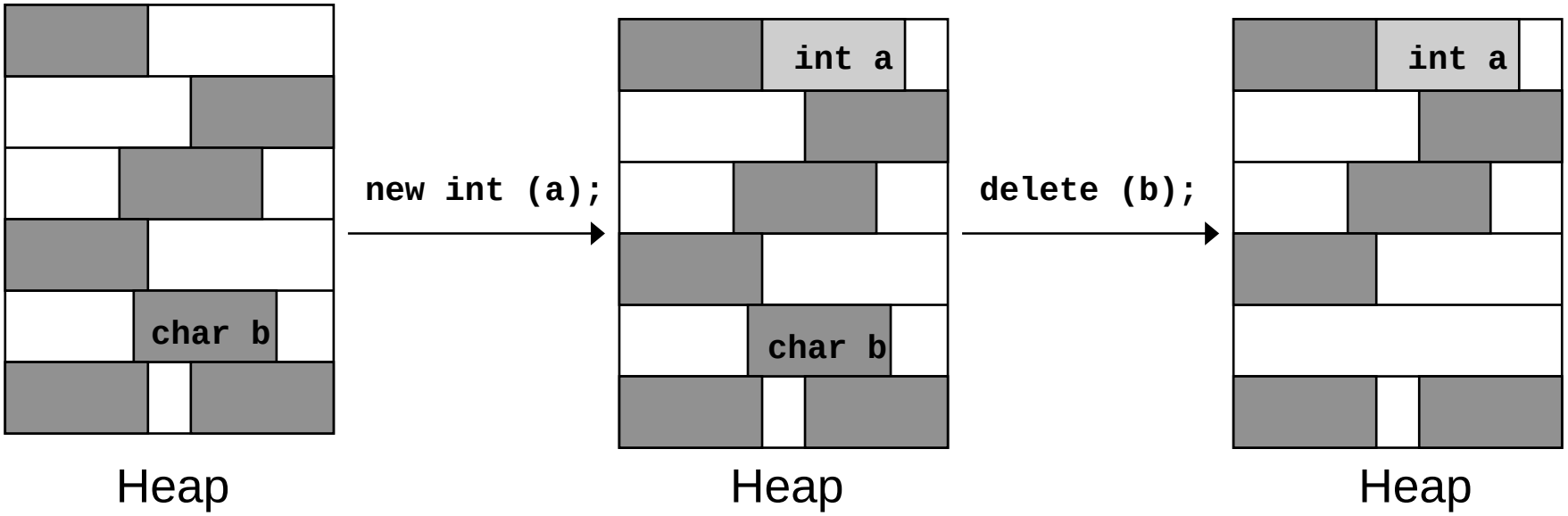
Stack

- Verwaltung durch Laufzeitsystem
- Arbeitet nach dem Prinzip "last-in-first-out"
- Verwaltung von Funktionsaktivierungen
- Speicherbereich für lokale Variablen



Heap

- Programmkontrollierte Verwaltung
- Speicherzuweisung per Anweisung (new/delete)
- Zugriff über "Zeiger-Variablen" (Referenzvariablen)
- Unterstützung durch Laufzeitsystem (Garbage Collection, ...)



Rekursion (1)

- "Definition eines Problems, einer Funktion oder eines Verfahrens durch sich selbst"
- bereits bekannt:
  - direkt rekursive Syntaxdiagramme/EBNF:

```
<boolescher Ausdruck> :: "true" | "false" |
                         "(" <boolscher Ausdruck> ")" ;
```

  - indirekt rekursive Syntaxdiagramme/EBNF:

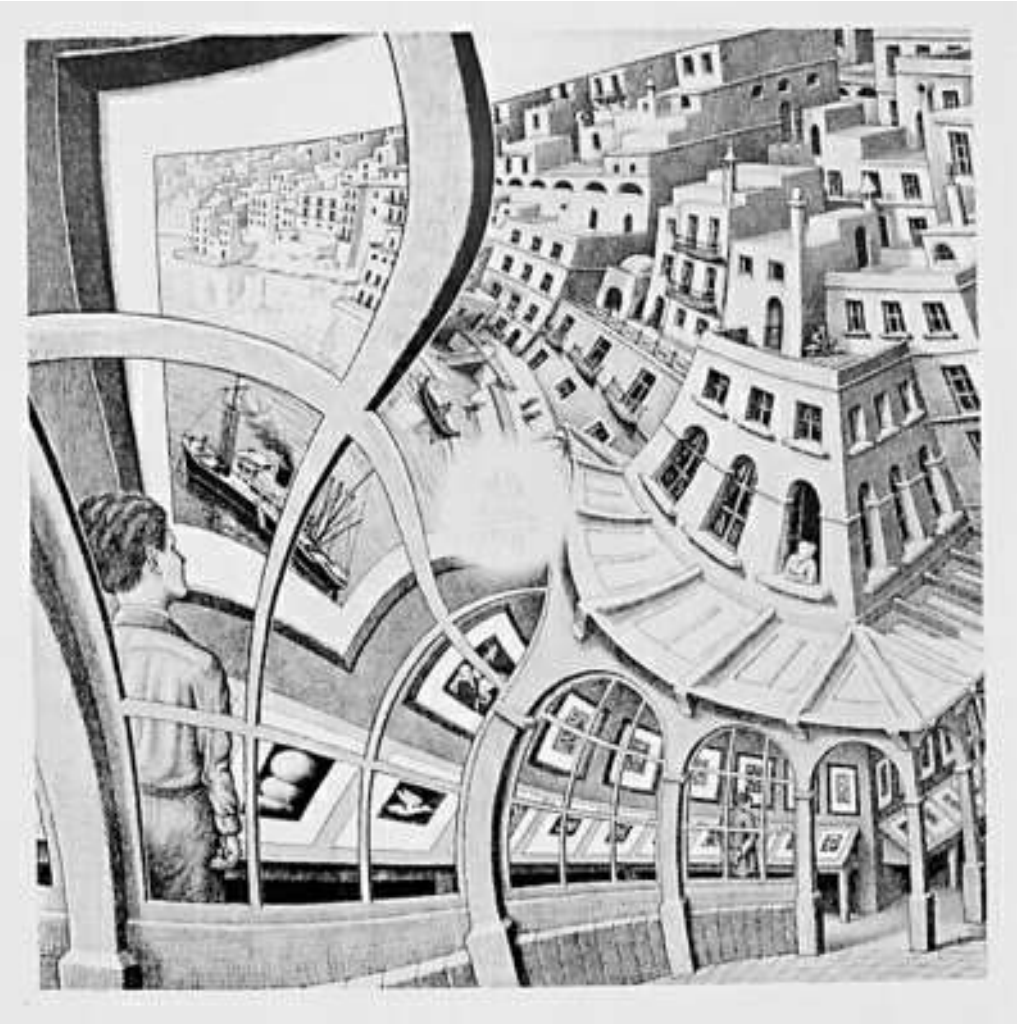
```
<Anweisung>       ::= ... | <while-Anweisung> ;
<while-Anweisung> ::= "while" "(" <bA> ")" <Anweisung> ;
```

  - Mathematik:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n * (n-1)! & \text{sonst} \end{cases}$$

Rekursion (2)

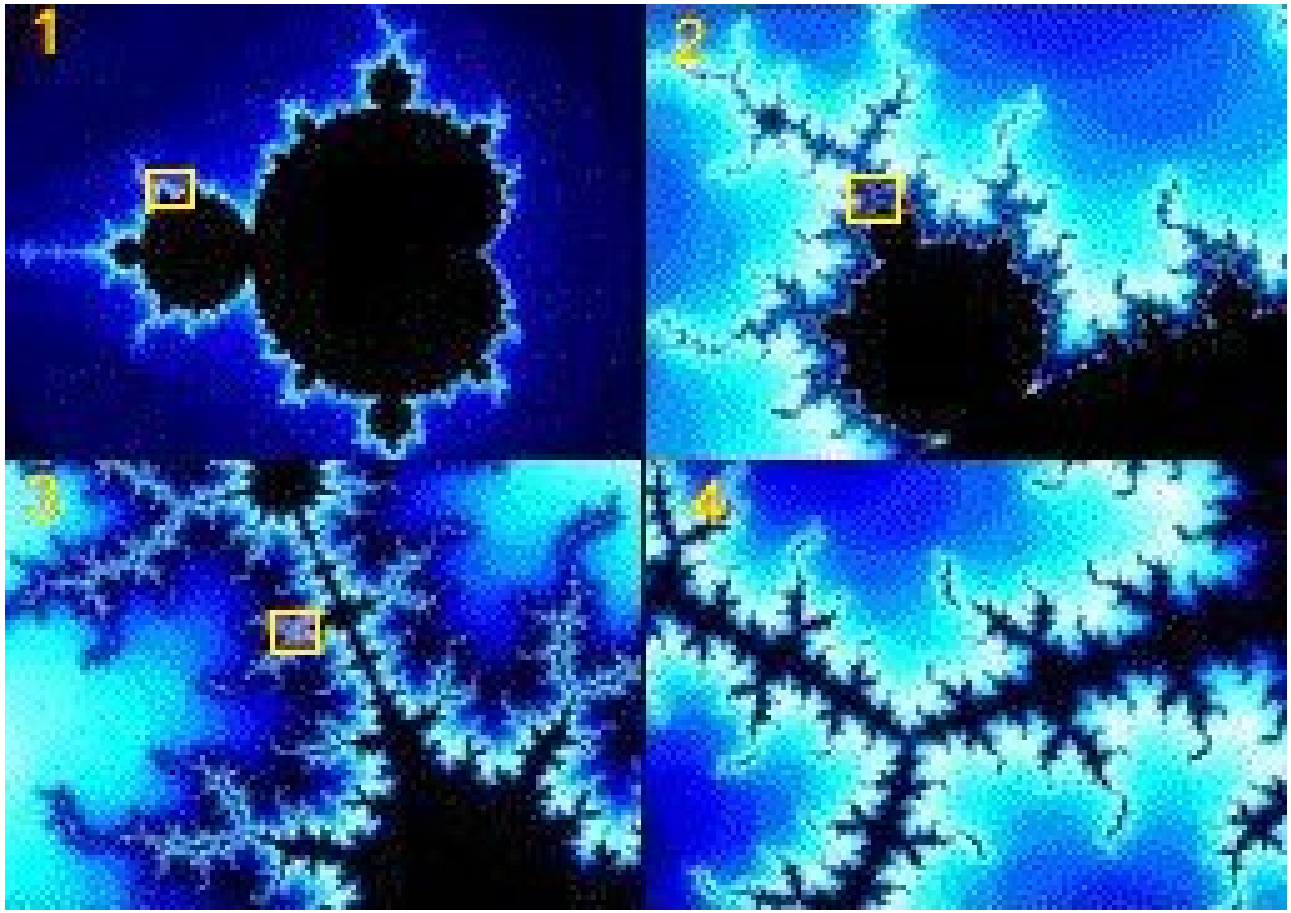
- Kunst:



M.C. Escher; Bildgalerie

Rekursion (3)

- Muster:



Mandelbrotmenge

http://www.mathematik.ch/anwendungenmath/fractal/julia/MandelbrotApplet.php

Rekursion / Definitionen

Definition (Rekursion):

Eine Funktion heißt **rekursiv**, wenn sie während ihrer Abarbeitung erneut aufgerufen wird.

Definition (direkte Rekursion):

Eine Funktion heißt **direkt rekursiv**, wenn der erneute Aufruf im Funktionsrumpf der Funktion erfolgt.

Definition (indirekte Rekursion):

Eine Funktion heißt **indirekt rekursiv**, wenn der erneute Aufruf nicht im Funktionsrumpf der Funktion selbst sondern in einer anderen Funktion erfolgt.

Definition (Rekursionstiefe):

Anzahl der aktuellen Aufrufe einer Funktion minus 1

Rekursive Prozeduren (1)

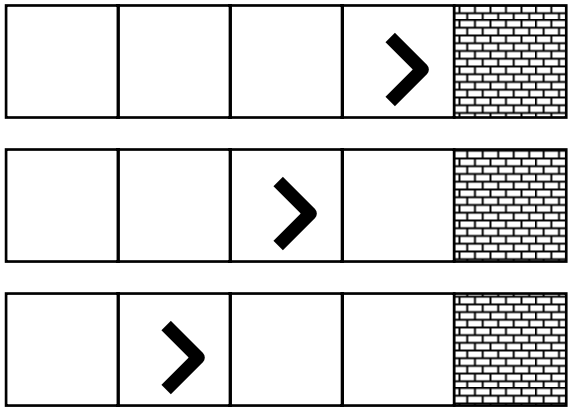
Der Hamster soll bis zur nächsten Wand laufen!

Iterative Lösung:

```
void zurMauer() {
  while (vornFrei())
    vor();
}
```

Direkt rekursive Lösung:

```
void zurMauerR() {
  if (vornFrei()) {
    vor();
    zurMauerR();
  }
}
```



Rekursive Prozeduren (2)

Der Hamster soll alle Körner auf dem aktuellen Feld einsammeln!

Iterative Lösung:

```
void sammle() {
  while (kornDa())
    nimm();
}
```

Direkt rekursive Lösung:

```
void sammleR() {
  if (kornDa()) {
    nimm();
    sammleR();
  }
}
```

Rekursive Prozeduren (3)

Der Hamster soll bis zur nächsten Wand und dann zurück zur Ausgangsposition laufen!

Iterative Lösung:

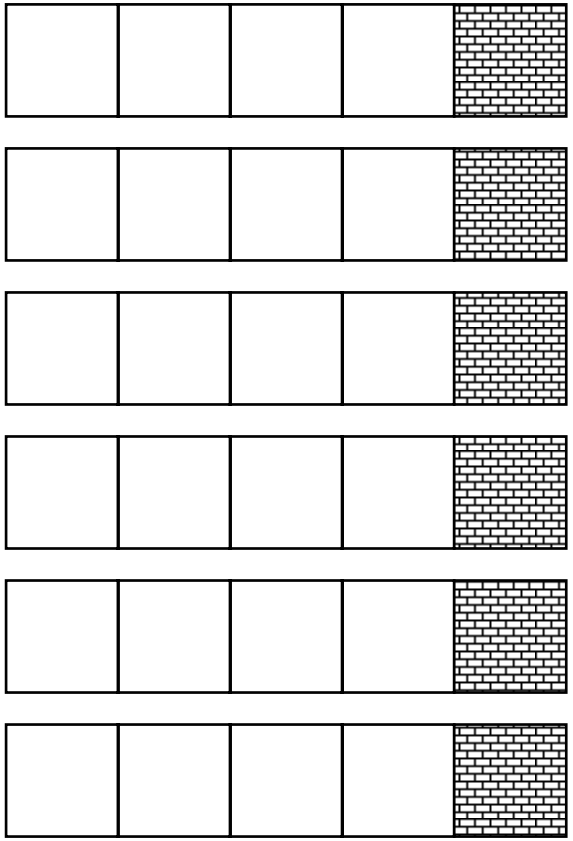
```
void hinUndZurueck() {
  int anzahl = 0;
  while (vornFrei()) {
    vor();
    anzahl++;
  }

  linksUm(); linksUm();

  while (anzahl > 0) {
    vor();
    anzahl--;
  }
}
```

Rekursive Prozeduren (4)

Der Hamster soll bis zur nächsten Wand und dann zurück zur Ausgangsposition laufen!

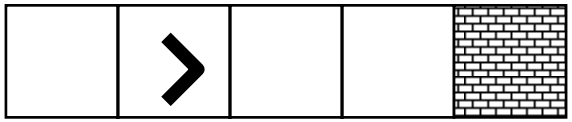
Direkt rekursive Lösung:

```
void hinUndZurueckR() {
  if (vornFrei()) {
    vor();
    hinUndZurueckR();
    vor();
  } else {
    kehrt();
  }
}

void kehrt() {
  linksUm();
  linksUm();
}
```



Rekursive Prozeduren (5)

Schema:



```
main:        hUZR (1.)       hUZR (2.)       hUZR (3.)

  hUZR();    vornFrei -> t
             vor();
             hUZR(); -----> vornFrei -> t
                            vor();
                            hUZR(); -----> vornFrei -> f
                                           kehrt();
                                  <-----
                            vor();
                       <-----
             vor();
        <-----

Befehlsfolge:   vor(); vor(); kehrt(); vor(); vor();
```

Rekursive Prozeduren (6)

Der Hamster soll bis zur nächsten Wand und dann zurück zur Ausgangsposition laufen!

Indirekt rekursive Lösung:

```
void hinUndZurueckR() {
  if (vornFrei()) {
    laufe();
  } else {
    linksUm(); linksUm();
  }
}

void laufe() {
  vor();
  hinUndZurueckR();
  vor();
}
```

Rekursive Funktionen (1)

Der Hamster soll die Anzahl an Schritten bis zur nächsten Mauer zählen!

Iterative Lösung:

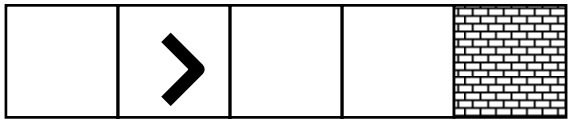
```
int anzahlSchritte() {
  int anzahl = 0;
  while (vornFrei()) {
    vor();
    anzahl++;
  }
  return anzahl;
}
```

Rekursive Lösung:

```
int anzahlSchritteR() {
  if (vornFrei()) {
    vor();
    return anzahlSchritteR() + 1;
  } else
    return 0;
}
```

Rekursive Funktionen (2)

Schema:



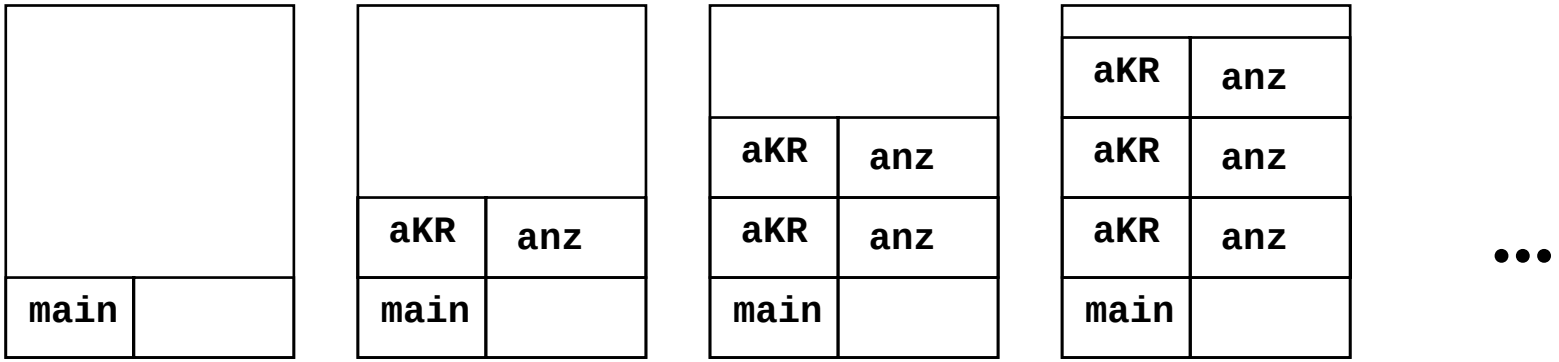
```
main:          aSR (1.)        aSR (2.)        aSR (3.)

i=aSR();       vornFrei -> t
               vor();
               aSR()  -----> vornFrei -> t
                             vor();
                             aSR()  -----> vornFrei -> f
                                           return 0;
                                      0
                                   <-----
                             return 0 + 1;
                          1
                       <-----
               return 1 + 1;
          2
       <-----
i=2;
```

Rekursive Funktionen / lokale Variablen

Der Hamster soll die Anzahl an Körnern im Maul zählen!

```
int anzahlKoernerR() {
  if (!maulLeer()) {
    gib();
    int anz = anzahlKoernerR();
    nimm(); // Vermeidung von Seiteneffekten!
    return anz + 1;
  } else
    return 0;
}
```

Stack

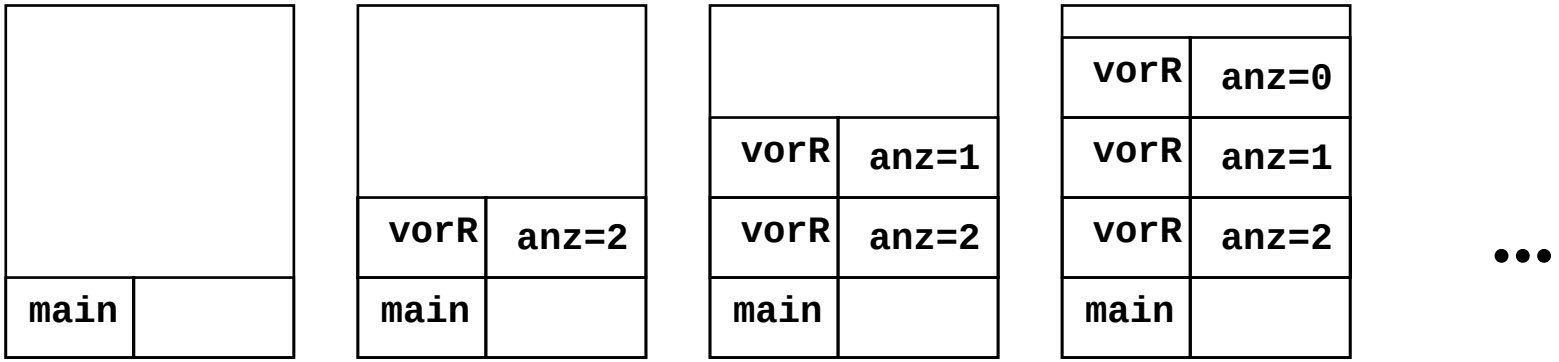


Rekursive Funktionen / Parameter

Der Hamster soll "anz"-Schritte nach vorne gehen!

```
void vorR(int anz) {
  if ((anz > 0) && vornFrei()) {
    vor();
    vorR(anz-1);
  }
}
```

Stack



Endlosrekursion

Endlosrekursion:

```
void sammleR() {
  if (kornDa()) {
    sammleR();
    nimm();
  }
}
```

Rekursionstiefe: im Prinzip "unendlich"!

erzeugt im allgemeinen einen Laufzeitfehler: Stack overflow!

Dem Java-Interpreter kann man die gewünschte Stackgröße mitteilen!

Rekursion

- Anmerkungen:
  - zu jedem rekursiv formulierten Algorithmus gibt es einen äquivalenten iterativen Algorithmus
- Vorteile rekursiver Algorithmen:
  - kürzere Formulierung
  - leichter verständliche Lösung
  - Einsparung von Variablen
  - teilweise sehr effiziente Problemlösungen (z.B. Quicksort)
- Nachteile rekursiver Algorithmen:
  - weniger effizientes Laufzeitverhalten (Overhead beim Funktionsaufruf)
  - Verständnisprobleme bei Programmieranfängern
  - Konstruktion rekursiver Algorithmen "gewöhnungsbedürftig"

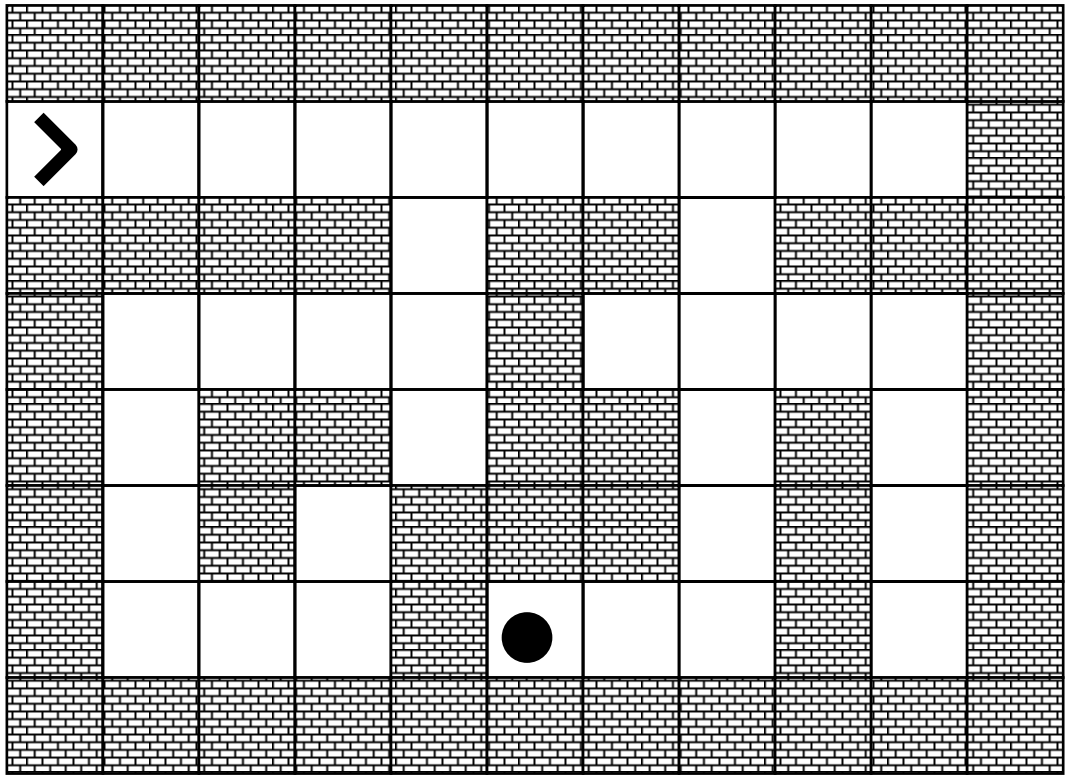
Backtracking-Verfahren (1)

- Prinzip:
  - Versuch, eine Teillösung eines gegebenen Problems systematisch zu einer Gesamtlösung auszubauen
  - falls in einer gewissen Situation ein weiterer Ausbau einer vorliegenden Teillösung nicht mehr möglich ist ("Sackgasse"), werden eine oder mehrere der letzten Teilschritte rückgängig gemacht
  - die dann erhaltene reduzierte Teillösung versucht man auf einem anderen Weg wieder auszubauen
  - Wiederholung des Verfahrens, bis Lösung gefunden wird oder man erkennt, dass keine Lösung existiert

- Grundlage der Programmiersprache PROLOG!
- Bekannte Probleme:
  - Springerproblem
  - Acht-Damenproblem
  - Labyrinthsuche

Backtracking-Verfahren (2)

Aufgabe: Der Hamster steht am Eingang eines zyklenfreien Labyrinths, in dem er ein Korn finden und auf dem schnellsten Weg zurücktransportieren soll!



Backtracking-Verfahren (3)

```
boolean gefunden = false;
void main() { sucheGeradeAb(); }
void sucheGeradeAb() {
  if (kornDa()) { gefunden = true; nimm(); }
  if (!gefunden && linksFrei()) {
    linksUm(); vor(); sucheGeradeAb(); vor(); linksUm();
  }
  if (!gefunden && rechtsFrei()) {
    rechtsUm(); vor(); sucheGeradeAb(); vor(); rechtsUm();
  }
  if (!gefunden && vornFrei()) {
    vor(); sucheGeradeAb(); vor();
  } else {
    kehrt();
} }
```

Beispiel 1

Anzahl an Ziffern einer Zahl ermitteln:

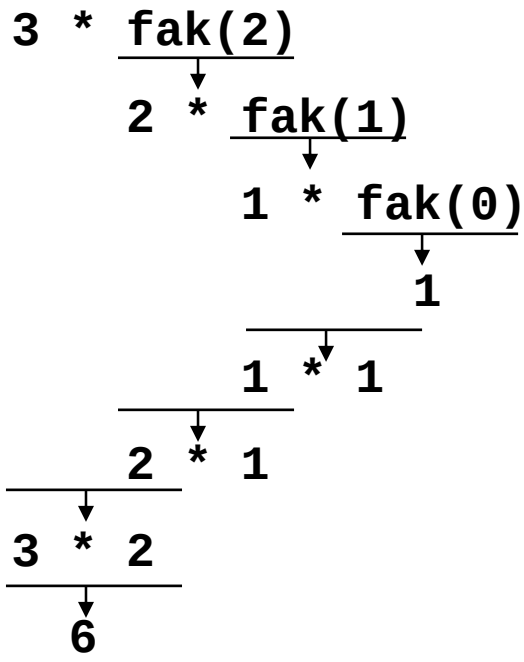
```
static int length(int zahl) {  // iterativ
  if (zahl == 0) return 1;
  int laenge = 0;
  while (zahl != 0) {
    zahl /= 10;
    laenge++;
  }
  return laenge;
}

 static int lengthR(int zahl) {  // rekursiv
   if (zahl >= -9 && zahl <= 9) return 1;
   return lengthR(zahl/10) + 1;
}
```

Beispiel 2

Berechnung der Fakultätsfunktion:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ n * (n-1)! & \text{sonst} \end{cases}$$

```
static int fak(int n) {
  if (n <= 0) return 1;
  else return n * fak(n-1);
}
```



Beispiel 3

Berechnung einer Fibonacci-Zahl:

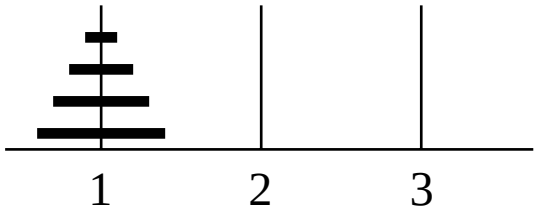
$$fib(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ 1 & \text{falls } n = 2 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{sonst} \end{cases}$$

```
static int fib(int n) {
  if (n <= 2)
    return 1;
  else
    return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

Beispiel 4

Türme von Hanoi:

Gegeben: 3 Pfosten mit n Scheiben
Ziel: Lege alle n Scheiben von 1 nach 3
Restriktion 1: immer nur eine Scheibe bewegen
Restriktion 2: niemals größere auf kleinere Scheibe



http://thinks.com/java/hanoi/hanoi.htm

```
class Hanoi {
  public static void main(String[] args) {
    int hoehe = IO.readInt("Hoehe: ");
    verlegeTurm(hoehe, 1, 3, 2);
  }
  static void verlegeTurm(int hoehe, int von,
                                     int nach, int ueber) {
    if (hoehe > 0) {
      verlegeTurm(hoehe-1, von, ueber, nach);
      IO.println(von + "-" + nach);
      verlegeTurm(hoehe-1, ueber, nach, von);
} } }
```

Aufgabe 1

Schreiben Sie ein Programm `ZiffernAusgeben`, das zunächst die Eingabe einer positiven ganzen Zahl erwartet und die Ziffern der Zahl anschließend zunächst von vorne nach hinten und dann von hinten nach vorne auf den Bildschirm ausgibt. Es dürfen keine Schleifen verwendet werden!

Beispiel:

```
$ java ZiffernAusgeben
Eingabe: 23456
Ausgabe: 23456
         65432
```

Nutzen Sie folgenden Programmrahmen:

```
class ZiffernAusgeben {
  public static void main(String[] a) {
      int zahl = IO.readInt("Zahl (>0):");
      ausgeben(zahl);
      rueckwaertsAusgeben(zahl);
  }
}
```

Aufgabe 2

Lösen Sie Aufgabe 2 aus UE 15 vollkommen rekursiv, d.h. ohne den Einsatz von Wiederholungsanweisungen!

Die Aufgabe lautete: Schreiben Sie ein Programm `Sortieren`, das die Ziffern einer eingelesenen positiven Zahl sortiert nach deren Größe auf den Bildschirm ausgibt. Es dürfen keine Arrays verwendet werden!

Beispiel:

```
$ java Sortieren
Eingabe: 37734207
Ausgabe: 02334777
```